

## RİYAZİYYAT

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА С ИНТЕГРАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ ДЛЯ  
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ  
ПРОИЗВОДНЫМИ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

Я.Т.МЕГРАЛИЕВ

*Бакинский Государственный Университет*  
*yasharmehraliyev@mail.ru*

*В работе исследована одна обратная краевая задача для дифференциального уравнения с частными производными четвертого порядка с интегральным граничным условием. Сначала исходная задача сводится к эквивалентной задаче, для которой доказывается теорема существования и единственности решения. Далее, пользуясь этими фактами доказываются существование и единственность классического решения исходной задачи.*

Рассмотрим уравнение

$$u_{tt}(x,t) - \alpha u_{tttt}(x,t) + u_{xxxx}(x,t) = a(t)u(x,t) + f(x,t) \quad (1)$$

в области  $D_T = \{(x,t) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq T\}$  и поставим для него обратную краевую задачу с начальными условиями

$$u(x,0) = \varphi(x), u_t(x,0) = \psi(x) \quad (0 \leq x \leq 1), \quad (2)$$

нелокальными условиями

$$u_x(0,t) = u_x(1,t) = u_{xxx}(0,t) = 0, \int_0^1 u(x,t) dx = 0 \quad (0 \leq t \leq T) \quad (3)$$

и дополнительным условием

$$u(0,t) = h(t) \quad (0 \leq t \leq T), \quad (4)$$

где  $\alpha > 0$  - заданное число,  $f(x,t), \varphi(x), \psi(x), h(t)$  - заданные функции, а  $u(x,t)$  и  $a(t)$  - искомые функции.

Смешанные задачи для гиперболических уравнений с нелокальными интегральными условиями были ранее рассмотрены в работах [1-2].

**Определение.** Классическим решением задачи (1)-(4) назовём пару  $\{u(x,t), a(t)\}$  функций  $u(x,t)$  и  $a(t)$ , обладающих следующими свойствами:

- 1) функция  $u(x,t)$  непрерывна в  $D_T$  вместе со всеми своими производными, входящими в уравнение (1);
- 2) функция  $a(t)$  непрерывна на  $[0, T]$ ;

- 3) все условия (1)-(4) удовлетворяются в обычном смысле.  
 Аналогично [3] можно доказать следующую лемму.

**Лемма 1.** Пусть

$$\varphi(x) \in C[0,1], \int_0^1 \varphi(x) dx = 0, \psi(x) \in C[0,1], \int_0^1 \psi(x) dx = 0,$$

$$f(x,t) \in C(D_T), \int_0^1 f(x,t) dx = 0 \quad (0 \leq t \leq T),$$

$$h(t) \in C^2[0,T], h(t) \neq 0 \quad (0 \leq t \leq T), \varphi(0) = h(0), \psi(0) = h'(0).$$

Тогда задача нахождения решения задачи (1)-(4) эквивалентна задаче определения функций  $u(x,t)$  и  $a(t)$ , обладающих свойствами 1) и 2) определения решения задачи (1)-(4), из (1),(2) и

$$u_x(0,t) = 0, u_x(1,t) = 0, u_{xxx}(0,t) = 0, u_{xxx}(1,t) = 0 \quad (0 \leq t \leq T), \quad (5)$$

$$h''(t) - \alpha_{xxx}(0,t) + u_{xxx}(0,t) = a(t)h(t) + f(0,t) \quad (0 \leq t \leq T). \quad (6)$$

С целью исследования задачи (1), (2), (5), (6) рассмотрим следующие пространства. Обозначим через  $B_{2,T}^\alpha$  [4] совокупность всех функций вида

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(t) \cos \lambda_k x \quad (\lambda_k = k\pi),$$

рассматриваемых в  $D_T$ , где каждая из функций  $u_k(t)$  ( $k = 0,1,\dots$ ) непрерывна на  $[0,T]$  и

$$J(u) \equiv \|u_0(t)\|_{C[0,T]} + \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \left( \lambda_k^\alpha \|u_k(t)\|_{C[0,T]} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} < +\infty,$$

причем  $\alpha \geq 0$ . Норму в этом множестве определим так:

$$\|u(x,t)\|_{B_{2,T}^\alpha} = J(u).$$

Через  $E_T^\alpha$  обозначим пространство  $B_{2,T}^\alpha \times C[0,T]$  вектор-функций  $z(x,t) = \{u(x,t), a(t)\}$  с нормой

$$\|z(x,t)\|_{E_T^\alpha} = \|u(x,t)\|_{B_{2,T}^\alpha} + \|a(t)\|_{C[0,T]}.$$

Известно, что  $B_{2,T}^\alpha$  и  $E_T^\alpha$  являются банаховыми пространствами.

Первую компоненту  $u(x,t)$  классического решения  $\{u(x,t), a(t)\}$  задачи (1),(2),(5),(6) будем искать в виде:

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(t) \cos \lambda_k x \quad (\lambda_k = k\pi), \quad (7)$$

где

$$u_k(t) = 2 \int_0^1 u(x,t) \cos \lambda_k x dx \quad (k = 0,1,\dots).$$

Тогда, применяя формальную схему метода Фурье, из (1) и (2) получаем:

$$(1 + \alpha \lambda_k^2) u_k''(t) + \lambda_k^4 u_k(t) = F_k(t; u, a) \quad (0 \leq t \leq T; k = 0, 1, \dots), \quad (8)$$

$$u_k(0) = \varphi_k, \quad u_k'(0) = \psi_k \quad (k = 0, 1, \dots), \quad (9)$$

где

$$F_k(t; u, a) = f_k(t) + a(t)u_k(t), \quad f_k(t) = 2 \int_0^1 f(x, t) \cos \lambda_k x dx,$$

$$\varphi_k = 2 \int_0^1 \varphi(x) \cos \lambda_k x dx, \quad \psi_k = 2 \int_0^1 \psi(x) \cos \lambda_k x dx \quad (k = 0, 1, \dots).$$

Из (8), (9) находим:

$$u_0(t) = \varphi_0 + t\psi_0 + \int_0^t (t - \tau) F_0(\tau; u, a) d\tau, \quad (10)$$

$$u_k(t) = \varphi_k \cos \beta_k t + \psi_k \frac{1}{\beta_k} \sin \beta_k t + \frac{1}{\beta_k (1 + \alpha \lambda_k^2)} \int_0^t F_k(\tau; u, a) \sin \beta_k (t - \tau) d\tau \quad (k = 1, 2, \dots), \quad (11)$$

где

$$\beta_k = \frac{\lambda_k^2}{\sqrt{1 + \alpha \lambda_k^2}}.$$

Очевидно, что

$$u_k'(t) = -\beta_k \varphi_k \sin \beta_k t + \psi_k \cos \beta_k t + \frac{1}{1 + \alpha \lambda_k^2} \int_0^t F_k(\tau; u, a) \cos \beta_k (t - \tau) d\tau \quad (k = 1, 2, \dots), \quad (12)$$

$$u_k''(t) = -\beta_k^2 \varphi_k \cos \beta_k t - \beta_k \psi_k \sin \beta_k t - \frac{\beta_k}{1 + \alpha \lambda_k^2} \int_0^t F_k(\tau; u, a) \sin \beta_k (t - \tau) d\tau + F_k(t; u, a) \quad (k = 1, 2, \dots). \quad (13)$$

После подстановки выражения  $u_k(t)$  ( $k = 0, 1, \dots$ ) в (7), для определения компоненты  $u(x, t)$  решения задачи (1), (2), (5), (6) получаем:

$$u(x, t) = \varphi_0 + t\psi_0 + \int_0^t (t - \tau) F_0(\tau; u, a) d\tau + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \varphi_k \cos \beta_k t + \psi_k \frac{1}{\beta_k} \sin \beta_k t + \frac{1}{\beta_k (1 + \alpha \lambda_k^2)} \int_0^t F_k(\tau; u, a) \sin \beta_k (t - \tau) d\tau \right\} \cos \lambda_k x. \quad (14)$$

Теперь, из (6), с учетом (7), имеем:

$$a(t) = h^{-1}(t) \left\{ h''(t) - f(0, t) + \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^2 u_k''(t) + \lambda_k^4 u_k(t)) \right\}. \quad (15)$$

Далее, из (8), в силу (13), получаем:

$$v_k(t) \equiv \alpha \lambda_k^2 u_k''(t) + \lambda_k^4 u_k(t) = F_k(t; u, a) - u_k''(t) = \beta_k^2 \varphi_k \cos \beta_k t + \beta_k \psi_k \sin \beta_k t + \frac{\beta_k}{1 + \alpha \lambda_k^2} \int_0^t F_k(\tau; u, a) \sin \beta_k(t - \tau) d\tau + \frac{\alpha \lambda_k^2}{1 + \alpha \lambda_k^2} F_k(t; u, a). \quad (16)$$

Для того чтобы получить уравнение для второй компоненты  $a(t)$  решения  $\{u(x, t), a(t)\}$  задачи (1), (2), (5), (6) подставим выражение (16) в (15):

$$a(t) = h^{-1}(t) \left\{ h''(t) - f(0, t) + \sum_{k=1}^{\infty} [\beta_k^2 \varphi_k \cos \beta_k t + \psi_k \beta_k \sin \beta_k t + \frac{\beta_k}{1 + \alpha \Delta_k^2} \int_0^t F_k(\tau; u) \sin \beta_k(t - \tau) d\tau + \frac{\alpha_k^2 \lambda_k}{1 + \alpha \Delta_k^2} F_k(t; u, a)] \right\}. \quad (17)$$

Таким образом, решение задачи (1), (2), (5), (6) свелось к решению системы (14), (17) относительно неизвестных функций  $u(x, t)$  и  $a(t)$ .

Исходя из определения решения задачи (1), (2), (5), (6) доказывается следующая

**Лемма 2.** Если  $\{u(x, t), a(t)\}$  - любое решение задачи (1), (2), (5), (6), то функции

$$u_k(t) = 2 \int_0^1 u(x, t) \cos \lambda_k x dx \quad (k = 0, 1, \dots)$$

удовлетворяют системе (10), (11).

Очевидно, что

$$\alpha \lambda_k^2 < 1 + \alpha \lambda_k^2 < (1 + \alpha) \lambda_k^2, (1 + \alpha)^{-1} \lambda_k < \beta_k < \alpha^{-1/2} \lambda_k.$$

Тогда из (11)-(13) и (16), соответственно, получаем:

$$|u_k(t)| \leq |\varphi_k| + \frac{\sqrt{1 + \alpha}}{\lambda_k} |\psi_k| + \frac{1}{\sqrt{\alpha} \lambda_k^3} \int_0^t |F_k(\tau; u, a)| d\tau \quad (k = 1, 2, \dots),$$

$$|u_k'(t)| \leq \frac{\lambda_k}{\sqrt{\alpha}} |\varphi_k| + |\psi_k| + \frac{1}{\alpha_k^2 \lambda_k} \int_0^t |F_k(\tau; u, a)| d\tau \quad (k = 1, 2, \dots),$$

$$|u_k''(t)| \leq \frac{\lambda_k^2}{\alpha} |\varphi_k| + \frac{\lambda_k}{\sqrt{\alpha}} |\psi_k| + \frac{1}{\alpha \sqrt{\alpha} \lambda_k} \int_0^t |F_k(\tau; u, a)| d\tau + \frac{1}{\alpha_k^2 \lambda_k} |F_k(t; u, a)| \quad (k = 1, 2, \dots),$$

$$|v_k(t)| \leq \frac{\lambda_k^2}{\alpha} |\varphi_k| + \frac{\lambda_k}{\sqrt{\alpha}} |\psi_k| + \frac{1}{\alpha \sqrt{\alpha}} \int_0^t |F_k(\tau; u, a)| d\tau + |F_k(t; u, a)| \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Отсюда имеем:

$$\left( \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^5 \|u_k(t)\|_{C[0, T]})^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq 2 \left( \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^5 |\varphi_k|)^2 \right)^{\frac{1}{2}} + 2\sqrt{1 + \alpha} \left( \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^4 |\psi_k|)^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \frac{2\sqrt{T}}{\sqrt{\alpha}} \left( \int_0^T \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^2 |f_k(\tau)|)^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} +$$

$$+ \frac{2T}{\sqrt{\alpha}} \|a(t)\|_{C[0,T]} \left( \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^5 \|u_k(t)\|_{C[0,T]})^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (18)$$

$$\left( \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^4 \|u'_k(t)\|_{C[0,T]})^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{2}{\sqrt{\alpha}} \left( \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^5 |\varphi_k|)^2 \right)^{\frac{1}{2}} +$$

$$+ 2 \left( \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^4 |\psi_k|)^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \frac{2\sqrt{T}}{\sqrt{\alpha}} \left( \int_0^T \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^2 |F_k(\tau; u, a)|)^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (19)$$

$$\left( \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k \|u''_k(t)\|_{C[0,T]})^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{3}{\alpha} \left( \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^5 |\varphi_k|)^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \frac{3}{\sqrt{\alpha}} \left( \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^4 |\psi_k|)^2 \right)^{\frac{1}{2}} +$$

$$+ \frac{3\sqrt{T}}{2\alpha\sqrt{\alpha}} \left( \int_0^T \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^2 |F_k(\tau; u, a)|)^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} + \frac{3}{\alpha} \left( \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k \|F_k(t; u, a)\|_{C[0,T]})^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (20)$$

$$\left( \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k \|v_k(t)\|_{C[0,T]})^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{3}{\alpha} \left( \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^3 |\varphi_k|)^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \frac{3}{\sqrt{\alpha}} \left( \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^2 |\psi_k|)^2 \right)^{\frac{1}{2}} +$$

$$+ \frac{3\sqrt{T}}{\alpha\sqrt{\alpha}} \left( \int_0^T \sum_{k=1}^{\infty} |F_k(\tau; u, a)|^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} + 2 \left( \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k \|F_k(t; u, a)\|_{C[0,T]})^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (21)$$

Предположим, что данные задачи (1),(2),(5),(6) удовлетворяют следующим условиям:

1.  $\varphi(x) \in C^4[0,1]$ ,  $\varphi^{(5)}(x) \in L_2(0,1)$  и  $\varphi'(0) = \varphi'(1) = \varphi'''(0) = \varphi'''(1) = 0$ .
2.  $\psi(x) \in C^3[0,1]$ ,  $\psi^{(4)}(x) \in L_2(0,1)$  и  $\psi'(0) = \psi'(1) = 0$ .
3.  $f(x,t), f_x(x,t) \in C(D_T)$ ,  $f_{xx}(x,t) \in L_2(D_T)$  и  $f_x(0,t) = f_x(1,t) = 0$  ( $0 \leq t \leq T$ ).
4.  $h(t) \in C^2[0,T]$ ,  $h(t) \neq 0$  ( $0 \leq t \leq T$ ).

Тогда из (18)-(21) и (10), соответственно, получаем:

$$\left( \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^5 \|u_k(t)\|_{C[0,T]})^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq 2 \|\varphi^{(5)}(x)\|_{L_2(0,1)} + 2\sqrt{1+\alpha} \|\psi^{(4)}(x)\|_{L_2(0,1)} +$$

$$+ \frac{2\sqrt{T}}{\sqrt{\alpha}} \left( \|f_{xx}(x,t)\|_{L_2(D_T)} + \frac{2T}{\sqrt{\alpha}} \|a(t)\|_{C[0,T]} \left( \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^5 \|u_k(t)\|_{C[0,T]})^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (22)$$

$$\left( \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^4 \|u'_k(t)\|_{C[0,T]})^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq 2 \|\varphi^{(5)}(x)\|_{L_2(0,1)} + 2\sqrt{1+\alpha} \|\psi''(x)\|_{L_2(0,1)} +$$

$$+ \frac{2\sqrt{T}}{\sqrt{\alpha}} \|a(t)u_{xx}(x,t) + f_{xx}(x,t)\|_{L_2(D_T)}, \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \left( \sum_{k=1}^{\infty} \left( \lambda_k^3 \|u_k''(t)\|_{C[0,T]} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} &\leq \frac{3}{\alpha} \|\varphi^{(5)}(x)\|_{L_2(0,1)} + \frac{3}{\sqrt{\alpha}} \|\psi^{(4)}(x)\|_{L_2(0,1)} + \\ &+ \frac{3\sqrt{T}}{\alpha\sqrt{\alpha}} \|a(t)u_{xx}(x,t) + f_{xx}(x,t)\|_{L_2(D_T)} + \\ &+ \frac{3}{\alpha} \left\| \|a(t)u_x(x,t) + f_x(x,t)\|_{C[0,T]} \right\|_{L_2(0,1)}, \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \left( \sum_{k=1}^{\infty} \left( \lambda_k \|v_k(t)\|_{C[0,T]} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} &\leq 2\sqrt{2} (\|a(t)\|_{C[0,T]} (\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^5 \|u_k(t)\|_{C[0,T]})^2)^{\frac{1}{2}} + \\ &\|f_x(x,t)\|_{C[0,T]} \|_{L_2(0,1)} + \frac{2}{\alpha} \|\varphi^{(3)}(x)\|_{L_2(0,1)} + \frac{2}{\sqrt{\alpha}} \|\psi^{(2)}(x)\|_{L_2(0,1)} + \\ &+ \frac{2\sqrt{2}}{\alpha\sqrt{\alpha}} (\|a(t)\|_{C[0,T]} (\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^5 \|u_k(t)\|_{C[0,T]})^2)^{\frac{1}{2}} + \sqrt{T} \|f(x,t)\|_{L_2(D_T)}), \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \|u_0(t)\|_{C[0,T]} &\leq \|\varphi(x)\|_{L_2(0,1)} + \|\psi(x)\|_{L_2(0,1)} + \\ &+ T\sqrt{T} \|f(x,t)\|_{L_2(D_T)} + T^2 \|a(t)\|_{C[0,T]} \|u_0(t)\|_{C[0,T]}. \end{aligned} \quad (26)$$

Далее, из (22) и (26) находим:

$$\|u(x,t)\|_{B_{2,T}^3} \leq A_1(T) + A_2(T) \|a(t)\|_{C[0,T]} \|u(x,t)\|_{B_{2,T}^3}, \quad (27)$$

где

$$\begin{aligned} A_1(T) &= 2 \|\varphi^{(5)}(x)\|_{L_2(0,1)} + 2\sqrt{1+\alpha} \|\psi^{(4)}(x)\|_{L_2(0,1)} + \frac{2\sqrt{T}}{\sqrt{\alpha}} \|f_{xx}(x,t)\|_{L_2(D_T)} + \\ &+ \|\varphi(x)\|_{L_2(0,1)} + T \|\psi(x)\|_{L_2(0,1)} + 2T\sqrt{T} \|f(x,t)\|_{L_2(D_T)}, \end{aligned}$$

$$A_2(T) = \sqrt{6\alpha - 1} T (1 + 2\sqrt{T}).$$

Теперь из (15), с учётом (25), имеем:

$$\|a(t)\|_{C[0,T]} \leq B_1(T) + B_2(T) \|a(t)\|_{C[0,T]} \|u(x,t)\|_{B_{2,T}^3}, \quad (28)$$

где

$$\begin{aligned} B_1(T) &= \|h^{-1}(t)\|_{C[0,T]} \|h''(t)\|_{C[0,T]} + \|f(0,t)\|_{C[0,T]} + \\ &+ \left( \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{-2} \right)^{\frac{1}{2}} \left[ \frac{2}{\alpha} \|\varphi''(x)\|_{L_2(0,1)} + \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \|\psi''(x)\|_{L_2(0,1)} \right] + \frac{2\sqrt{2T}}{\alpha\sqrt{\alpha}} \|f_{xx}(x,t)\|_{L_2(D_T)} + \\ &+ 2\sqrt{2} \left\| \|f_x(x,t)\|_{C[0,T]} \right\|_{L_2(0,1)}, \end{aligned}$$

$$B_2(T) = 2 \|h^{-1}(t)\|_{C[0,T]} \left( \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{-2} \right)^{\frac{1}{2}} (T+1).$$

Из неравенств (27), (28) заключаем:

$$\|a(t)\|_{C[0,T]} + \|u(x,t)\|_{B_{2,T}^3} \leq A(T) + B(T)\|a(t)\|_{C[0,T]}\|u(x,t)\|_{B_{2,T}^3}, \quad (29)$$

где

$$A(T) = A_1(T) + B_1(T), \quad B(T) = T(T+2) + B_2(T).$$

Итак, можно доказать следующую теорему.

**Теорема 1.** Пусть выполнены условия 1-4 и

$$B(T)(A(T) + 2)^2 < 1. \quad (30)$$

Тогда задача (1),(2),(5),(6) имеет в шаре  $K = K_R(\|z\|_{E_T^5} \leq A(T) + 2)$  из  $E_T^5$  единственное решение.

**Доказательство.** В пространстве  $E_T^5$  рассмотрим уравнение

$$z = \hat{O}z, \quad (31)$$

где  $z = \{u, a\}$ , компоненты  $\Phi_i$  оператора  $\hat{O}(u, a)$  определены правыми частями уравнений (14), (17), соответственно. Рассмотрим оператор  $\hat{O}(u, a)$  в шаре  $K = K_R(\|z\|_{E_T^5} \leq R = A(T) + 2)$  из  $E_T^5$ .

Аналогично (29) получаем, что для любых  $z, z_1, z_2 \in K_R$  справедливы оценки:

$$\|\hat{O}z\|_{E_T^5} \leq A(T) + B(T)\|a(t)\|_{C[0,T]}\|u(x,t)\|_{B_{2,T}^3}, \quad (32)$$

$$\|\hat{O}z_1 - \hat{O}z_2\|_{E_T^5} \leq B(T)R \left( \|a_1(t) - a_2(t)\|_{C[0,T]} + \|u_1(x,t) - u_2(x,t)\|_{B_{2,T}^3} \right). \quad (33)$$

Тогда из оценок (29) и (30), с учетом (27), следует, что оператор  $\Phi$  действует в шаре  $K = K_R$  и является сжимающим. Поэтому в шаре  $K = K_R$  оператор  $\Phi$  имеет единственную неподвижную точку  $\{u, a\}$ , которая является решением уравнения (28).

Функция  $u(x,t)$ , как элемент пространства  $B_{2T}^5$ , имеет непрерывные производные  $u_x(x,t), u_{xx}(x,t), u_{xxx}(x,t), u_{xxxx}(x,t)$  в  $D_T$ .

Из неравенств (23), (24) следует, что  $u_t(x,t), u_{tt}(x,t), u_{ttt}(x,t)$  непрерывны в  $D_T$ .

Легко проверить, что уравнение (1) и условия (2), (5), (6) удовлетворяются в обычном смысле. Значит,  $\{u(x,t), a(t)\}$  является классическим решением задачи (1),(2),(5),(6), а в силу леммы 2 это решение- единственно. Теорема доказана.

С помощью леммы 1 легко доказывается следующая

**Теорема 2.** Пусть выполняются все условия теоремы 1 и

$$\int_0^1 \varphi(x) dx = 0, \int_0^1 \psi(x) dx = 0, \int_0^1 f(x,t) dx = 0 \quad (0 \leq t \leq T),$$

$$\varphi(0) = h(0), \quad \psi(0) = h'(0).$$

Тогда задача (1)-(4) имеет в шаре  $K = K_R \left( \|z\|_{E_T^5} \leq A(T) + 2 \right)$  из  $E_T^5$  единственное классическое решение.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Гордезиани Д.Г., Авалишвили Г.А. // Мат. моделирование, 2000, т.12, №1, с. 94-103.
2. Пулькина Л.С. Нелокальная задача с интегральными условиями для гиперболического уравнения // Дифференц. уравнения, 2004, т.40, №7, с. 887-892.
3. Намазов Г.К., Мегралиев Я.Т. Исследование классического решения одномерной обратной краевой задачи для полулинейных псевдогиперболических уравнений высокого порядка // Вестник Бакинского Университета, серия физико-математических наук, 2003, №2, с.5-15.
4. Худавердиев К.И. К теории многомерных смешанных задач для нелинейных гиперболических уравнений // Докт. дис. физ.-матем. наук, Азерб. Гос. Унив., Баку: 1973, 319 с.

### **DÖRDÜNCÜ TƏRTİB XÜSUSİ TÖRƏMƏLİ DİFERENSİAL TƏNLİK ÜÇÜN İNTEQRAL SƏRHƏD ŞƏRTLİ TƏRS MƏSƏLƏ**

**Y.T.MEHRƏLİYEV**

#### **XÜLASƏ**

İşdə dördüncü tərtib xüsusi törəmli diferensial tənlik üçün inteqral sərhəd şərtli bir tərs məsələ tədqiq edilmişdir. Bunun üçün əvvəlcə qoyulmuş məsələ ekvivalent məsələyə gətirilir və bu məsələnin həllinin varlığı və yeganəliyi isbat edilir. Sonra isə bunlardan istifadə edərək qoyulmuş məsələnin klassik həllinin varlığı və yeganəliyi göstərilir.

### **INVERSE PROBLEM WITH INTEGRAL CONDITIONS FOR THE PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATION OF THE FOURTH ORDER**

**Y.T.MEHRALIYEV**

#### **SUMMARY**

The paper investigates an inverse boundary problem for the partial differential equation of the fourth order with integral boundary condition. First, the initial problem reduces to the equivalent problem for which the theorem of existence and uniqueness is proved. Then using these facts the existence and uniqueness of the classic solution of the initial problem are proved.